La ejercitación matemática

Mgs. Eladio Oliveros y Msc. Moisés Villena

Resumen

Uno de los momentos más importantes en el aprendizaje de la Matemática se produce cuando el estudiante resuelve ejercicios, individual o colectivamente, un proceso al cual llamamos comúnmente como ejercitación. Es por ello que se hace imprescindible conocer y analizar los elementos más importantes inherentes a este acto con vistas a fortalecer la enseñanza, actualizar nuestras concepciones y eliminar mitos y creencias tradicionales que merman la efectividad del aprendizaje.

Introducción

Definitivamente queda muy claro que lo más importante no es la cantidad de ejercicios que resuelva el educando, sino la calidad de los mismos en función de varios parámetros como son, entre otros, la variedad, profundidad, nivel de integración con otros contenidos, que promuevan el pensamiento heurístico, etc. El extinto e ilustre Profesor Campano (2002), después de muchos años de investigación sobre las dificultades que presentaban nuestros alumnos en el aprendizaje, apuntó en su tesis: "…sucede que el conductismo nos dejó como herencia el mito de que el estudiante aprende más matemática mientras más ejercicios resuelva y esto puede ser cierto siempre que estos ejercicios promuevan el desarrollo del pensamiento en todos los órdenes... si proponemos un sistema de 100 ejercicios similares, el estudiante aprende con el primero de ellos y con los restantes 99, en el mejor de los casos, mejora la letra y poco a poco comienza a rechazar la Matemática".

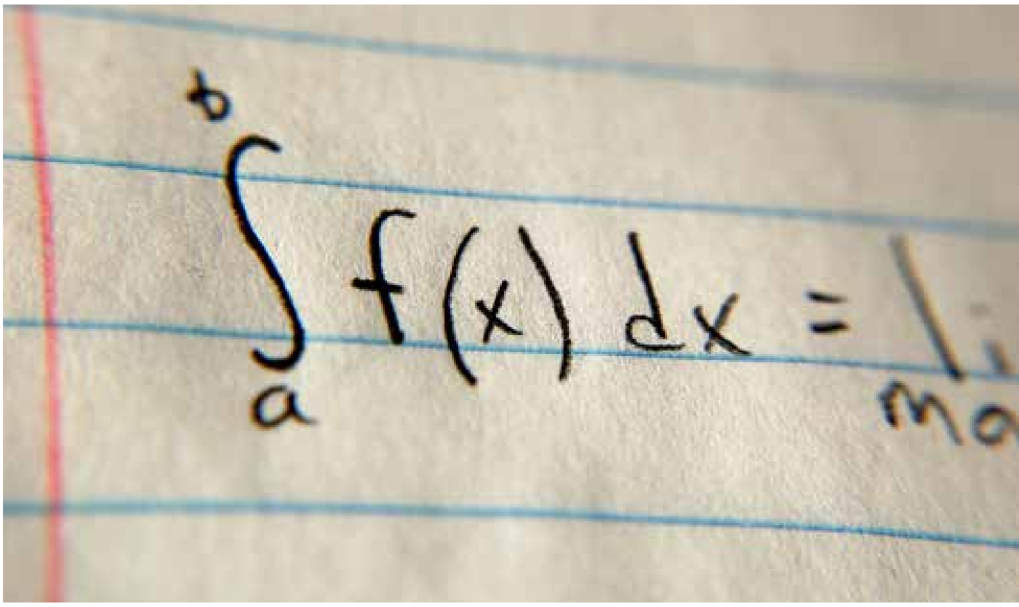
Muchas veces, nuestros alumnos resuelven muchos ejercicios relacionados con un tema determinado, sin embargo, cuando se enfrentan a uno nuevo, lo cual ocurre generalmente en los exámenes, no saben cómo actuar e intentan repetir los procesos realizados anteriormente de forma mecánica sin tener conciencia clara de lo que hacen e incapaces de fundamentar los pasos de su ejecución. Como consecuencia, los resultados académicos son malos porque no se produjo un aprendizaje significativo. Lo peor es que después de cierto tiempo, aquellos procesos mecánicos-memorísticos que sirvieron para "aprobar" un examen, se olvidan con mucha facilidad y pasan a formar parte del inventario de tiempo perdido en la escuela o el colegio.

Podemos hacer muchas clasificaciones, pero en realidad hay dos momentos decisivos en la clase de Matemática: la introducción de un nuevo contenido y la ejercitación. Ambos momentos están muy unidos y en la práctica no podemos separarlos.

Deben quedar claros algunos términos que usamos con frecuencia. Se entiende por ejercicio matemático toda actividad de esta ciencia que requiere la ejecución de procesos mentales o escritos. Es una categoría muy amplia y abarca, entre otras muchas, a los llamados problemas. En Matemática se ha considerado universalmente que un problema es un ejercicio matemático, con texto o no, para el cual no tenemos un algoritmo prefijado que lo resuelva directamente, es decir, que el estudiante tiene que construir un modelo, simple o profundo, que le permita comprender su esencia y encontrar sus soluciones: resolverlo.

Funciones de la ejercitación

En general, la función central de la ejercitación es la consolidación de los contenidos tratados, en el aula de clases o fuera de ésta, para formar y desarrollar capacidades generales del pensamiento. La adquisición de estas capacidades se materializan en el desarrollo de las destrezas en los estudiantes: saber hacer. Entre las funciones más importantes podemos señalar las siguientes:



1. Desarrolla el pensamiento matemático, donde se incluye el lógico o deductivo que nos ayuda a concatenar ideas, el crítico que nos ayuda a fundamentar diferentes procesos y acciones, el lateral que nos brinda la posibilidad de encontrar varias vías de solución para el mismo problema y el perspectivo que nos da la posibilidad de estimar caminos e incluso resultados. En cuanto a este último y, con vistas a eliminar el mecanicismo, es conveniente enseñar a nuestros alumnos el procedimiento de usar la mente antes de usar el lápiz.

2. Integra el contenido. Los ejercicios brindan la posibilidad de vincular contenidos de varios bloques (numéricos, geométricos, funciones, etc.) e incluso con otras ciencias y con la vida real siempre que el contenido se preste para ello.

3. Profundiza el contenido. Es imposible brindar, dentro del tiempo que tenemos para una clase, toda la información disponible acerca de un tema dado. Esta profundización se logra a través de la ejercitación. Se deben abordar conceptos colaterales e incluso, el estudiante puede descubrir y demostrar otras regularidades o teoremas afines. Para ello, es sumamente importante la graduación de las dificultades para que el proceso de aprendizaje fluya de manera natural, sin traumatismos para los discentes.

4. Enlaza los contenidos nuevos con los ya conocidos. La tarea docente, comúnmente conocida como deber (debía llamarse placer), es una forma efectiva de ejercitar siempre y cuando se use racionalmente. El docente puede proponer un sistema de dos o tres ejercicios, bien graduados, de forma tal que prepare al estudiante para el nuevo contenido que se estudiará, solicitando además conjeturas acerca de ciertos procesos o resultados. Así, enlaza e hilvana el andamiaje matemático.

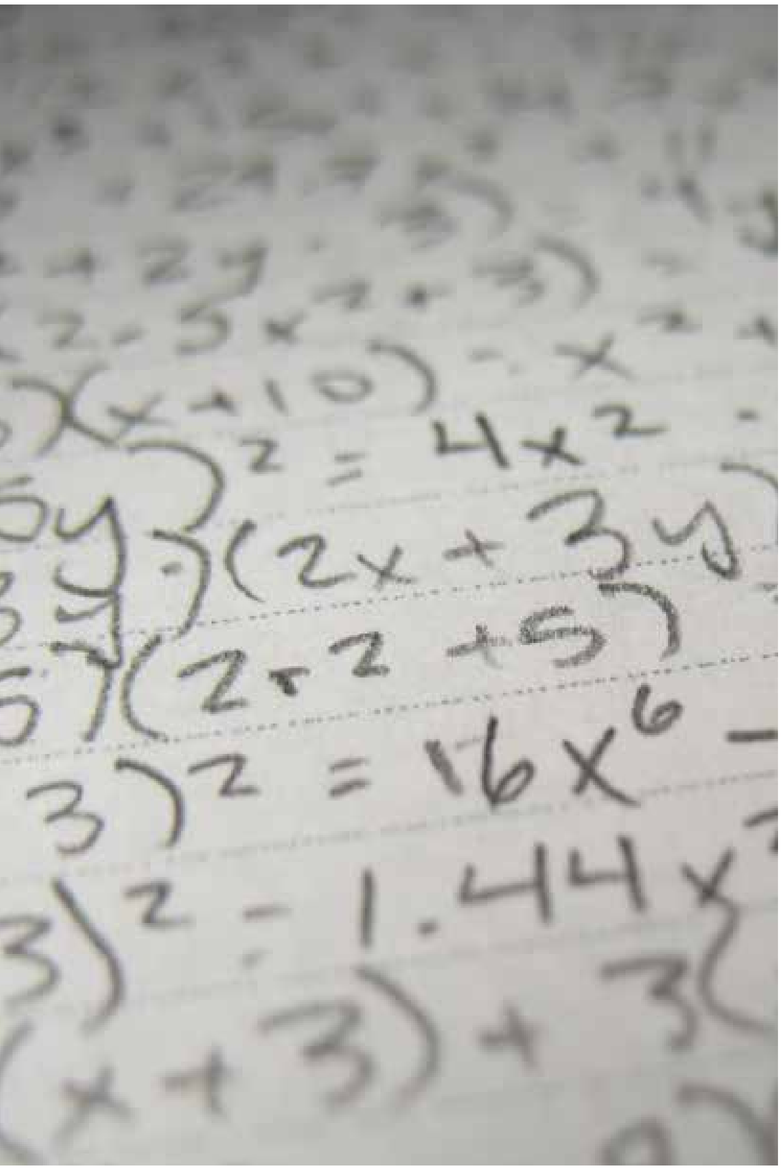
5. Brinda estrategias. Una buena ejercitación no solo aporta estrategias de trabajo para un tema determinado, sino que fortalece el desarrollo de otras ya existentes en la mente del educando y muestra el camino a seguir en procesos de la vida cotidiana. Estas estrategias se aplicarán, muchas veces, en el momento menos esperado. Muchos investigadores actuales consideran más importantes las estrategias que los conocimientos en sí mismos, puesto que estos últimos se encuentran al alcance de todos debido al gran desarrollo de la información.

El aprendizaje de algo nuevo debe ser siempre un acto de alegría y disfrute. La ejercitación nos brinda esa posibilidad, pero el fin nunca podrá ser el conocimiento en sí mismo, sino el proceso vivido.

El Príncipe de las matemáticas, Carl Friedrich Gauss dijo al respecto: "No es el conocimiento, sino el acto de aprendizaje, y no la posesión, sino el acto de llegar allí, que concede el mayor disfrute".

Desde la antigüedad, cuando se presenta un nuevo contenido, el profesor realiza uno o varios ejercicios a manera de ejemplos. Pero cuidado, porque éste resulta el primer enfrentamiento del estudiante con la nueva ejercitación y, casi siempre, lo que hace el docente se asume como paradigma de trabajo por parte de todos los educandos.

De aquí que debemos prestar mucha atención en la selección y desarrollo de los ejemplos que planteamos en clases. Algunas recomendaciones son las siguientes:



1. El ejercicio seleccionado debe ser representativo del contenido en cuestión. Hay ejercicios que enseñan mucho, que por sí solos nos inducen una carga de creatividad y desarrollan el pensamiento porque muestran y brindan estrategias de trabajo matemático e integran conocimientos, ya que en su resolución intervienen procesos mentales que pueden ser aplicados en diversas situaciones dentro y fuera de la matemática. Estos ejercicios podemos llamarlos fecundos debido a la huella constructiva que dejan en el pensamiento.

2. En lo posible, en el ejemplo seleccionado deben apreciarse varias vías de solución, cada una de las cuales deben ser discutidas y analizadas, valorando la más racional. Esto desarrolla de manera especial el pensamiento lateral y abre la mente del estudiante hacia otras situaciones de la vida cotidiana. En toda clase de Matemática debe ser común la siguiente pregunta: ¿Existen otras vías de solución para el mismo problema?

3. Debe integrar contenidos anteriores. Los problemas no aparecen aislados, siempre integran varios nudos críticos y los ejemplos que desarrollamos en clases no pueden apartarse de esta realidad.

4. Lograr la participación de los estudiantes en la fundamentación del proceso de solución. No importa el tiempo que el docente emplea en el desarrollo de un ejemplo, lo esencial es que los alumnos comprendan y expresen con sus palabras las diferentes justificaciones y realicen conjeturas. Este es un momento crucial no solo para fijar conceptos y teoremas, sino para que se comprenda la necesidad de los mismos.

5. Prestar especial atención al uso de la pizarra puesto que los estudiantes tienden a reproducir las formas que usan los docentes.

6. Cuando se realice más de un ejemplo, debe cuidarse la graduación de las dificultades. Si primero resolvemos el ejercicio más complejo podemos desmotivar a nuestros alumnos, se pierde efectividad y atención en la clase.

7. Conseguir la atención de los alumnos. Esta es una tarea difícil en los tiempos actuales. Sin embargo, el docente debe planificar también estos momentos de motivación y aplicar estrategias didácticas que permitan un nivel adecuado de concentración.

En primer lugar debemos aclarar dos categorías del conocimiento matemático: Saber y Poder. Se entiende por saber la cantidad de conocimientos que posee un individuo; conceptos, teoremas y procedimientos que domina. En cambio, el poder es la capacidad que tiene este individuo para aplicar esos conocimientos que posee. Es común observar, en los tiempos actuales, estudiantes con mucho saber y poco poder lo que se pone de manifiesto en los exámenes de todo tipo. A raíz de estos últimos también es muy común escuchar a padres de familia decir: No comprendo lo que le sucede a mi hijo porque se lo sabía todo, pero se confunde en las preguntas del examen.

Es claro que está fallando el poder, porque aprender muchas leyes y repetir conceptos no hace desarrollar estrategias mentales para la resolución de problemas y por tanto no genera poder. En este ámbito, resulta conveniente conocer y estudiar los diferentes tipos de ejercicios matemáticos que debemos desarrollar con nuestros alumnos. Los ejercicios se pueden clasificar de la siguiente manera:

> “No es el conocimiento, sino el acto de aprendizaje, y no la posesión, sino el acto de llegar allí, que concede el mayor disfrute”.
> Carl Friedrich Gauss

Ejercicios de Fijación

Son los primeros que debemos proponer después de impartir un nuevo contenido. No es posible pasar a las siguientes fases, ni siquiera a la reproducción propiamente dicha, si no se fijan los conceptos y teoremas estudiados. Estos son ejercicios de respuestas muy cortas, pero que exigen un trabajo mental que permite una asociación inmediata con los elementos nuevos. Preguntas de verdadero y falso, de reconocimiento, clasificar objetos, completar frases, fundamentar procesos o resultados dados son, entre otros, ejemplos de este tipo de ejercicios los cuales deben desarrollarse, principalmente en el marco de la clase.

Ejemplo:
Completa los espacios en blanco:

a) $\frac{3}{8} + \square = 1$ b) $\frac{3}{7} \cdot \square = 1$

c) $\frac{11}{8} - \square = 1$ d) $4\frac{3}{5} + \square = 6$

$\square - 1 = \frac{1}{4}$ f) $\square + \square = 1$

Ejercicios de Reproducción

Son básicos para la formación y el desarrollo de las destrezas. Sin embargo, no se trata de proponer muchos ejercicios similares pues esto no resolvería problema alguno como ya hemos visto. En cada nuevo ejercicio debe haber una nueva dificultad, de forma tal que permita desarrollar en el estudiante la necesidad de pensar y aplicar de forma sencilla los conocimientos. Ciertamente, en este tipo de ejercicios no deben introducirse dificultades complejas, pero se deben buscar formas que eliminen la “tentación” de repetir mecánicamente. Por ejemplo, una vez fijado el concepto de valor absoluto de un número entero se puede proponer a los estudiantes el siguiente sistema de ejercicios:

Ejemplo:
Halla, en cada caso, los posibles valores que puede tomar la variable x.

a) $|x| = 7$ b) $|x| = 0$

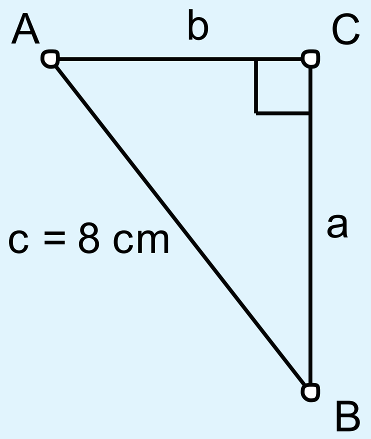
c) $|x| = -4$ d) $|x| < 3$

e) $|x| > 0$ f) $|x| = -x$

g) $|x| = < 4$ h) $1 < |x| < 5$

Ejercicios de Aplicación

En esta categoría podemos ubicar a todos aquellos ejercicios cuya resolución requiera de una aplicación de conceptos y leyes estudiadas. Muchos de los ejercicios de cálculo, en dependencia de su grado de complejidad, pueden ubicarse como reproductivos o de aplicación. Por ejemplo, si pedimos calcular el área de un triángulo rectángulo y damos los dos catetos se trata de un ejercicio de reproducción, pero si pedimos el área del mismo triángulo rectángulo ofreciendo como datos la hipotenusa y el perímetro, se trata de un ejercicio de aplicación.



Ejemplo:

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 8 cm y su perímetro es P = 18 cm.

1. Halla el área del triángulo dado.
2. ¿Qué relación debe existir entre la hipotenusa y el perímetro para que el área del triángulo sea numéricamente igual a la mitad de su perímetro?

Surge entonces la idea de aplicar el álgebra:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = c^2 + 2ab$

Ahora sustituimos y calculamos:
$10^2 = 8^2 + 2ab$ <-> $2ab = 100 – 64 = 36$,
pero sabemos que A (ABC) = $(a \cdot b)/2$

Entonces, si 2ab = 36, tendremos que A(ABC)= 9 cm^2

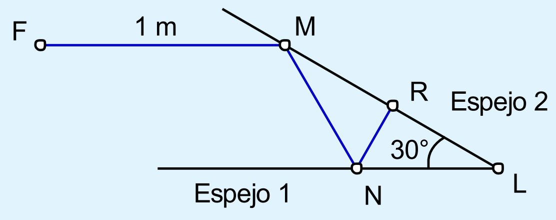
Aprovechando que este resultado (9 cm^2) nos ha dado numéricamente igual a la mitad del perímetro, podemos preguntarnos: ¿Ocurre siempre esto?, ¿bajo qué condiciones se cumple esta igualdad? Entonces se propone el literal b), que es un ejercicio de una aplicación mayor, donde el estudiante tiene que crear un modelo para resolverlo; se trata de un ejercicio de creación. La respuesta, en este caso, se enuncia así: se cumple la condición pedida cuando P = 2c + 2.

Ejercicios de Creación

Los estudiantes deben construir modelos o crear estrategias, basándose en las ya conocidas, para encontrar alguna vía de solución al problema planteado. Generalmente, estos ejercicios integran varios bloques y formas de pensamiento. Un ejemplo de ello es el literal b) del ejemplo anteriormente expuesto. Se pueden citar otros muchos ejemplos, pero lo más importante es que este tipo de ejercicios no puede soslayarse y, mucho menos subestimar la capacidad de nuestros alumnos para resolverlos. Es claro que todo esto nos exige una mayor preparación y capacitación permanente a todos los docentes, pero los resultados que alcanzamos en el desarrollo de nuestros alumnos son extraordinarios y solo por eso, bien vale la pena.

Ejemplo:

Dos espejos forman un ángulo de 30° en el punto L. Un rayo de luz sale de la fuente F y llega al punto M del Espejo 2, luego se refleja en el punto N del Espejo 1 y así continúa reflejándose hasta llegar nuevamente al punto F. Halla la distancia total recorrida por el rayo de luz si conocemos que $\overline{FM} = \overline{ML} = 1m$



Actitud del estudiante frente al ejercicio

Existen varias posturas del estudiante ante un determinado ejercicio matemático, desde la indiferencia total hasta la perseverancia en la búsqueda de soluciones. ¿Cuándo aprende más un alumno? ¿Cuándo observa la resolución de varios ejercicios o cuando piensa y analiza uno en particular? Al respecto, el conocido y experimentado Profesor Ochoa(2004) manifestó: "El estudiante aprende más analizando y pensando un problema, aunque no logre finalmente resolverlo, que viendo resolver veinte". De aquí se desprende la necesidad de involucrar al educando en la búsqueda de vías de solución de los diferentes tipos de ejercicios que se proponen. Por tanto, una buena clase no es aquella donde se realizan muchos ejercicios, sino aquella donde el estudiante participa activamente en el proceso de solución de ejercicios debidamente seleccionados.

Podemos definir las diferentes posturas del estudiante ante la ejecitación de la siguiente manera:

1. Observador pasivo. El docente explica un ejemplo y el alumno no se involucra en el proceso del pensamiento de su profesor. Tiempo perdido.

2. Observador activo. El docente explica y el estudiante se concentra en el proceso. El profesor debe hacer preguntas constantemente, tales como: ¿Recuerdan leyes y conceptos relacionados con este ejercicio?, ¿han realizado alguna vez un ejercicio similar a éste?, ¿qué ideas podemos aplicar?, ¿qué camino podemos seguir?

3. Trabajo independiente. Una de las posturas más productivas y desarrolladoras. Se debe emplear cuando los alumnos muestren determinado dominio. Esto incluye la investigación.

4. Trabajo colectivo. En equipos, se trabajan los ejercicios propuestos por el profesor. Debe velarse porque el trabajo en equipo no se reduzca a la labor de un estudiante líder, aunque es inevitable y provechoso la aparición del líder del grupo, siempre y cuando realice una labor que propicie el trabajo de todos.

Debe tenerse presente que todos los alumnos son diferentes, en especial, su ritmo de aprendizaje. El docente debe estar preparado para ello. En un momento de la clase, algunos estudiantes pueden estar trabajando de forma independiente, mientras que otros necesitan la ayuda de su profesor u otros compañeros. Es un error pedagógico frecuente el hecho de intentar que todos los estudiantes realicen las mismas actividades.

Sistema de ejercicios

La palabra sistema indica interconexión, dependencia de uno con respecto a los otros. Por eso, cuando hablamos de un sistema de ejercicios nos referimos a un conjunto de actividades que, persiguiendo un objetivo determinado, se interrelacionan de forma tal que se satisfacen los siguientes requerimientos:

1. Existe una graduación de las dificultades: de lo más simple a lo más complejo.

2. La cantidad de ejercicios no es excesiva pues de lo contrario el estudiante pierde el interés por su resolución y, de forma directa o indirecta, se produce una repetición de dificultades que tiende a la mecanización de procesos por parte del alumno. Esto es válido también para la elaboración de exámenes.

3. Hay variedad en los ejercicios, se explotan las diferentes posibilidades evaluativas de los contenidos de referencia. Se pregunta de forma variada también. En este sentido es muy importante proponer ejercicios con texto, que obligue a una necesaria lectura e interpretación por parte del estudiante. Comúnmente, nuestros alumnos no gustan de leer, y cuando se enfrentan a un ejercicio con texto dicen que "está difícil" antes de leerlo.

4. Se integran contenidos del mismo año con años anteriores y con otras materias. Integrar contenidos de varios bloques curriculares es incuestionable en la elaboración de un sistema de ejercicios.

5. Existen conexiones con la vida cotidiana. En cada sistema deben proponerse ejercicios donde el alumno encuentre aplicación de los contenidos estudiados. En cierta medida eso responde a la pregunta: ¿para qué me sirve?

Debemos recordar siempre a nuestros alumnos que, en general, no existen métodos para resolver problemas. Lo que sí podemos plantear, de forma general también, son las condiciones necesarias para resolver problemas:

1. Saber leer (entiéndase saber interpretar).

2. Tener deseos de resolver el problema (motivación).

3. Poseer un mínimo de conocimientos (saber y destrezas).

4. Poseer estrategias específicas (poder).

Conclusión

Sin lugar a dudas, una correcta planificación y aplicación de la ejercitación garantiza un desarrollo pleno del pensamiento matemático de nuestros estudiantes y con ello se garantiza al mismo tiempo un desarrollo del pensamiento social y cultural. El profesor debe prepararse para este reto, capacitarse formalmente en aspectos educativos que le permitan el logro de este objetivo.

Referencias Bibliográficas

1. OLIVEROS, Eladio; (2002). Metodología de la enseñanza de la Matemática. Editorial Santillana.

2. Alvarez de Zayas C; (1992) La Escuela en la Vida. La Habana, Educación y Desarrollo, Ministerio de Educación Superior.

3. Díaz F. y Hernández; G. (2001), Estrategias Docentes para un aprendizaje significativo, Colombia, Mc. Graw Hill.

Palabras clave

Conductismo, aprendizaje significativo, ejercicio matemático, problema matemático, saber hacer, poder hacer, placer

Autor

Msc. Moisés Villena
mvillenam@usm.edu.ec

Moisés Villena Muñoz, Master en Docencia e Investigación Educativa, es catedrático e investigador, posee trayectoria académica en la Universidad Santa María (Campus Guayaquil), Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL), Universidad de Especialidades Espíritu Santo (UEES). Ha desempeñado cargos como Coordinador Académico del área de Matemática en el Ingreso a la ESPOL, catedrático de Pregrado y Posgrado. Es autor del libro Matemáticas Básicas. Ha elaborado folletos de cálculo diferencial e integral para ingeniería, folletos de cálculo aplicado a la Administración y la Economía. Ha participado en seminarios, cursillos y ciclos de conferencias relacionados a la matemática y a la docencia.

Actualmente es profesor a tiempo completo en el área de matemática de la Universidad Santa María, Campus Guayaquil.

Asignaturas Impartidas

- Cálculo Diferencial.
- Cálculo Integral.
- Ecuaciones Diferenciales.
- Cálculo de Varias Variables.
- Álgebra Lineal.
- Matemáticas Básicas.
- Estadística.

Autor

Mgs. Eladio Oliveros
eoliveross@usm.edu.ec

Licenciado en Educación, especialidad Matemática, es catedrático e investigador, posee una amplia trayectoria académica desarrollada en Cuba, Alemania, Mozambique y Ecuador. Es profesor a tiempo completo en la Universidad Santa María (Campus Guayaquil), donde labora hace 4 años. Ha desempeñado cargos como Director del Instituto de Ciencias Exactas de la ciudad de Holguín-Cuba, Metodólogo de Matemática, Asesor y consultor internacional para la enseñanza de la Matemática en la Editorial Harcourt, Orlando, USA. Entrenador de Talentos matemáticos y editor de textos para la enseñanza de la Matemática. Catedrático Pregrado. Tiene amplia formación docente-pedagógica. Ha trabajado, desde 1975 en la formación de profesores de Matemática. Ha realizado estudios de postgrado en Alemania y de Maestría en Matemática Superior en la Universidad Pedagógica de Holguín, Cuba. Su espíritu autodidacta es la fuente principal de su preparación.

Actualmente es profesor a tiempo completo en el área de matemática de la Universidad Santa María, Campus Guayaquil.

Asignaturas Impartidas

- Matemática 0.
- Matemática I.
- Matemática II.
- Matemática III.